



SOLUÇÕES INCONSISTENTES NO MÉTODO DE VOLUMES FINITOS PARA MALHAS DE VORONOI

João Flávio Vieira de Vasconcelos

IPRJ - UERJ

Cx. P. 97.282 - CEP 28.601-970

Nova Friburgo - Rio de Janeiro - Brasil

Luciano Amaury dos Santos

Antônio Fábio Carvalho da Silva

Clovis Raimundo Maliska

EMC - UFSC

Cx. P. 476 - CEP 88040-900

Florianópolis - Santa Catarina - Brasil

RESUMO. A aplicação do método de volumes finitos para malhas não-estruturadas, desenvolvido por Maliska (1995) e devidamente testado em outros trabalhos, pode convergir para soluções inconsistentes dependendo do tipo de malha e da aproximação utilizada no gradiente de pressão. A apresentação destes resultados, bem como a discussão de algumas possíveis causas do problema são o objetivo deste trabalho.

PALAVRAS-CHAVE: Volumes Finitos, Malhas Não-Estruturadas, Diagramas de Voronoi

1. INTRODUÇÃO

Maliska (1995) apresentou em seu livro as bases de uma metodologia em volumes finitos que faz uso de malhas não-estruturadas, mais especificamente malhas de Voronoi, para o mapeamento do domínio. Este trabalho segue a tendência observada na literatura de se usar malhas não-estruturadas no método de volumes finitos, como se observa em Davidson (1996) e Mathur e Murthy (1997). Somente assim consegue o método de volumes finitos ficar livre da limitação geométrica que sempre o acompanhou, apesar dos esforços dos pesquisadores nas últimas décadas em resolver este problema, como o uso de coordenadas generalizadas, principalmente.

Em Maliska (1995) não foram apresentados resultados para a formulação proposta. Cardoso (1997), que

seguiu parcialmente a metodologia, apresentou os primeiros resultados. Em seu trabalho o problema clássico da cavidade quadrada com a fronteira móvel é estudado, porém os resultados não foram satisfatórios, provavelmente por causa da forma como foram calculados os gradientes de pressão nas faces dos volumes, forma esta que é diferente da detalhada em Vasconcellos e Maliska (1998).

O primeiro trabalho elaborado com a formulação desenvolvida por Maliska (1995) foi apresentado por Vasconcellos e Maliska (1998). Neste trabalho, com excessão de uma pequena alteração no cálculo da média dos coeficientes, tudo mais segue a proposta original. Os resultados apresentados em Vasconcellos e Maliska (1998) referem-se a dois problemas usualmente encontrados na literatura para a avaliação de novas metodologias: cavidade quadrada com uma fronteira móvel e convecção natural em uma cavidade quadrada. Para estes problemas, os resultados obtidos foram bastante satisfatórios.

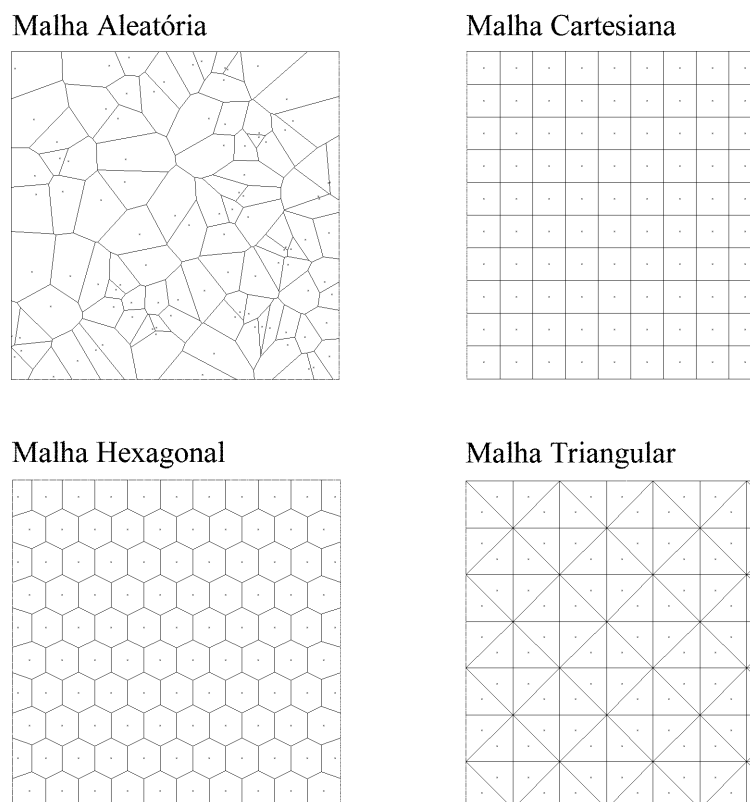


Figura 1 - Exemplo das malhas de Voronoi

No trabalho de Vasconcellos (1999) a análise do método de volumes finitos usando malhas não-estruturadas é aprofundada. O método é comparado com a solução analítica de um problema tridimensional transiente apresentada por Ethier e Steinman (1994) e os resultados são satisfatórios.

O uso de malhas com configurações completamente distintas, como apresentado na Figura 1, é um aspecto novo que se apresenta no uso de malhas não-estruturadas, principalmente para os usuários do método de volumes finitos clássicos que até então estavam fortemente vinculados às malhas estruturadas. Idealmente, espera-se que com o aumento do número de volumes usados no mapeamento do domínio, todas as malhas levem à mesma solução do problema, independentemente da forma de cada um dos volumes finitos. Então, o objetivo ao se selecionar uma malha está em determinar aquela que com um número menor de volumes fornece o melhor resultado, assegurando um menor custo computacional. Porém, em estudo desenvolvido por Vasconcellos (1999) demonstrou-se que isto não ocorre sempre. Existem determinadas configurações de malhas que fazem com que a solução obtida seja diferente de uma solução padrão. Estas malhas neste trabalho são denominadas malhas inconsistentes. O propósito deste artigo é

justamente o de mostrar que este fenômeno acontece e buscar possíveis causas para ele.

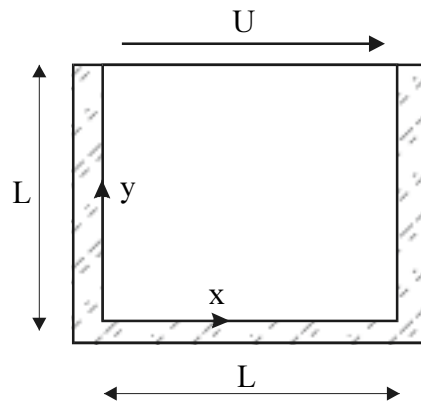


Figura 2 - Detalhe da cavidade com tampa móvel

2. SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA CAVIDADE QUADRADA COM UMA FRONTEIRA MÓVEL

Não é objetivo deste trabalho tratar da metodologia em detalhes. Toda a formulação usada na obtenção dos resultados que serão apresentados pode ser encontrada em Maliska (1995), Vasconcellos e Maliska (1998) ou Vasconcellos (1999). Os resultados que serão apresentados referem-se ao problema da cavidade quadrada com tampa móvel, cujo esquema é apresentado na Figura 2. A solução padrão usada para a comparação dos resultados foi a apresentada por Guia *et alii* (1982). Estes resultados foram obtidos em uma cavidade de 1 x 1 m. As variáveis que compõe a definição do número de Reynolds foram consideradas unitárias, com exceção da viscosidade. Os resultados estão todos no sistema métrico internacional.

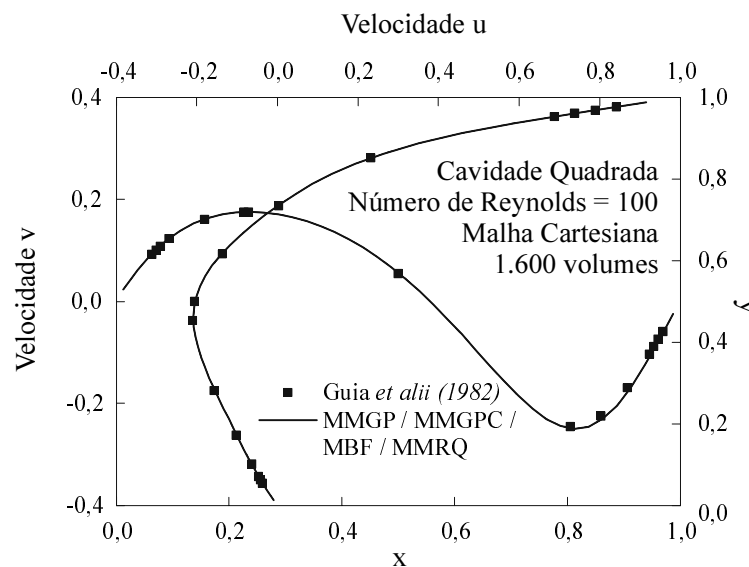


Figura 3 - Velocidades - Malha cartesiana - Número de Reynolds = 100

O primeiro resultado é apresentado na Figura 3, em que se constata uma excelente concordância dos resultados de todos os métodos com a solução padrão de Guia *et alii* (1982). Nesta solução mapeou-se o domínio usando malhas cartesianas e quatro métodos foram usados para o cálculo do gradiente de pressão. A saber: o método do mínimo resíduo quadrático (Taniguchi *et alii*, 1991), MMRQ, o método do balanço de

forças (Jameson e Mavriplis, 1986), MBF, o método da média dos gradientes ponderados (Maliska, 1995), MMGP, e o método da média do gradiente ponderado corrigido (Santos *et alii*, 1999), MMGPC. Os perfis de velocidades deste gráfico e dos demais estão sobre a linha que divide o quadrado no meio, tanto na direção x (velocidade v), quanto na direção y (velocidade u). Os métodos supracitados são metodologias distintas para o cálculo do gradiente de pressão, cada qual com sua característica. Quando se opta por malhas não-estruturadas, perde-se a facilidade para o cálculo de gradientes, visto que os pontos onde estão armazenadas as propriedades já não se encontram mais alinhados com um sistema coordenado. Em malhas não-estruturadas não é possível calcular os gradientes seguindo uma fórmula simples baseada em série de Taylor. Esta é a razão que levou esses autores a desenvolver métodos, que são naturalmente mais complexos, para a determinação do gradiente. Recomendamos a leitura dos trabalhos de Vasconcellos e Maliska (1999) e de Santos *et alii* (1999) para um melhor entendimento destas metodologias. A descrição matemática destes quatro métodos encontra-se detalhada nestes dois artigos anteriormente citados e não há necessidade de repeti-la aqui.

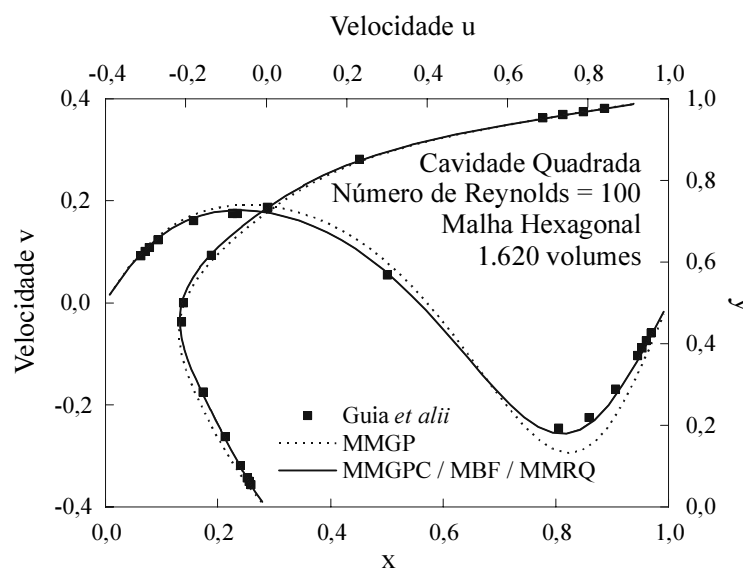


Figura 4 - Velocidades - Malha hexagonal - Número de Reynolds = 100

O segundo resultado, visto na Figura 4, refere-se ao mesmo problema anterior, mas neste caso mapeou-se o domínio usando malhas hexagonais. O uso do MMGP para o cálculo do gradiente de pressão levou a uma solução um pouco diferente das demais. Nestas malhas, este método, fornece um pequeno erro que contribui para uma solução inferior às demais. Mas é importante citar que com o refinamento da malha esta diferença diminui. O resultado visto na Figura 5 refere-se a mesma situação apresentadas nas Figuras 3 e 4, mas desta vez com o domínio mapeado com uma malha triangular. Os resultados são razoáveis, embora continue havendo uma pequena diferença na solução obtida com o gradiente calculado segundo o MMGP. Reitera-se que esta diferença diminui com o refino da malha.

Há dois aspectos que devem ser destacados. O primeiro deles é que há alguma dependência da solução do problema com o método escolhido para o cálculo do gradiente de pressão. E em segundo lugar, em todos os resultados apresentados a solução é consistente, ou seja, apesar de pequenas diferenças uma das outras, elas se aproximam da solução padrão. O refinamento faz com que esta diferença diminua e fique cada vez mais próximo da solução padrão. O uso de malhas aleatórias produz resultados em inferior qualidade relativamente aos apresentados, isto porque não há neste tipo de malha uma distribuição homogênea dos volumes ao longo do domínio. Mas, o resultado continua sendo consistente com a solução padrão.

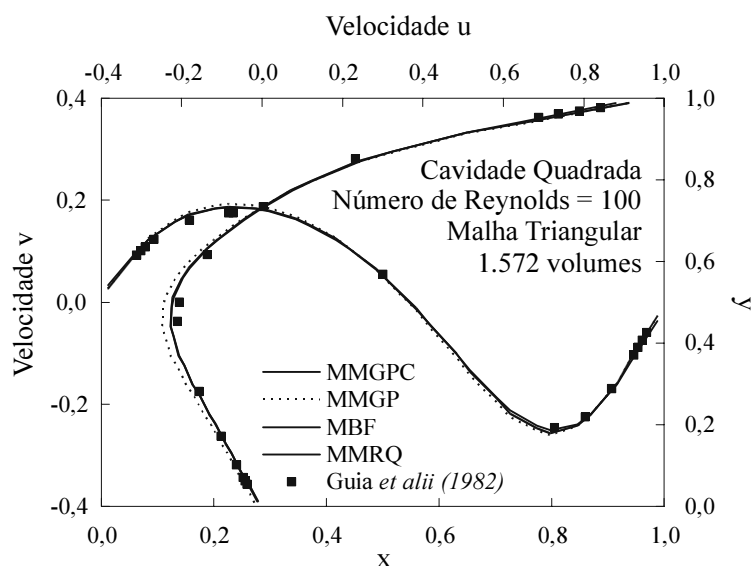


Figura 5 - Velocidades - Malha triangular - Número de Reynolds = 100

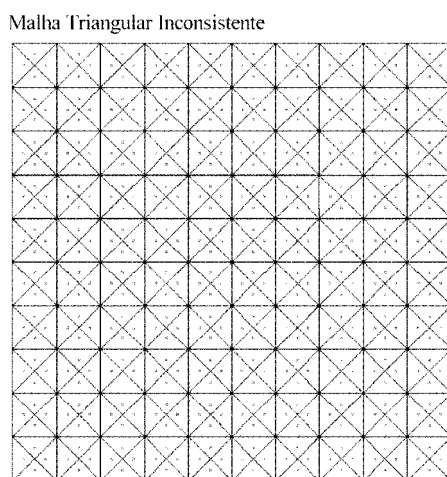


Figura 6 - Malha triangular inconsistente

Para aprofundar a discussão, uma outra malha triangular foi testada. Apresentada na Figura 6 ela é ligeiramente diferente da malha triangular vista na Figura 1. Esta malha é denominada neste trabalho de malha triangular inconsistente, por razões que serão conhecidas a seguir.

Tanto a malha triangular da Figura 1 quanto a malha triangular inconsistente haviam sido usadas em um trabalho de Santos *et alii* (1996) para a verificação da influência da malha no cálculo do Laplaciano. A conclusão daquele trabalho foi que os erros no cálculo do Laplaciano tendem a se cancelar e com o refino da malha a diferença entre a solução numérica e analítica tende a diminuir. Isto para ambas as malhas.

A Figura 7 apresenta os resultados para as velocidades com a malha triangular inconsistente. O primeiro resultado inconsistente foi obtido usando o MMRQ (Taniguchi *et alii*, 1991). Inicialmente pensou-se ser problema com o refino da malha. Mas os testes demonstraram que esta é a solução final. O refino em quase nada altera este padrão. Outra possibilidade especulada foi algum efeito associado à função de interpolação. Os testes realizados neste sentido não mostraram nenhum comportamento inesperado para a função de interpolação usada, WUDS modificada para malhas não-estruturadas (Maliska, 1995), em relação à esta malha.

Após algumas tentativas infrutíferas chegou-se a uma provável causa desta anomalia na solução. As

metodologias para o cálculo do gradiente de pressão estariam contribuindo para isto. Os resultados apresentados na Figura 7 comprovam esta hipótese. O MBF, o único dentre os métodos que tem fundamentação física, apresentou um erro menor.

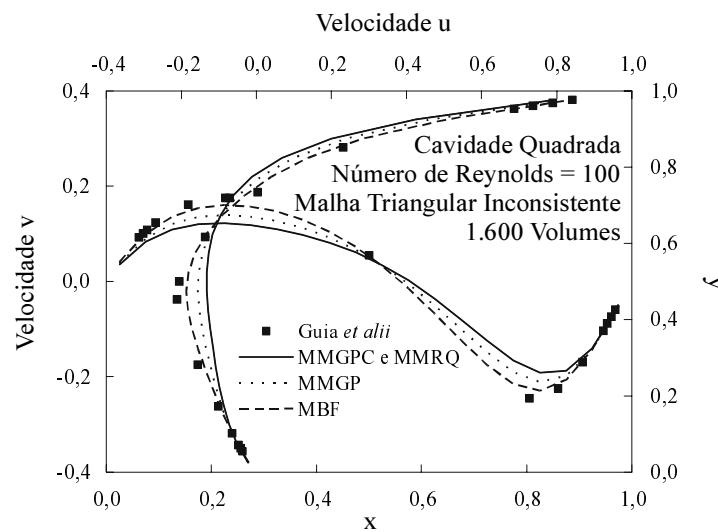


Figura 7 - Velocidades - Malha triangular inconsistente - Número de Reynolds = 100

Em outros problemas físicos testados, mas que não serão aqui apresentados, como no escoamento entre placas planas paralelas, este efeito se repetiu. Em malhas triangulares inconsistentes a solução convergiu para um padrão de velocidade fora do esperado.

A questão que cabe neste momento é por que para esta malha há este comportamento ou por que não há este comportamento na malha triangular apresentada na Figura 1 ?

Na busca da resposta procurou-se conhecer como todos estes métodos de cálculo do gradiente se comportam em ambas as malhas triangulares. Para isso, escolheu-se uma função, Eq. (1), e calculou-se o gradiente desta função nestas malhas. A medida de erro adotada neste trabalho, e usada por Roth (1997), é calculada segundo a Eq. (2).

(1)

$$P(x, y) = [x(1-x)y(1-y)]^2$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_i^{NV} \left[\left(\frac{\Delta P}{\Delta x} \Big|_i - \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x_i, y_i} \right)^2 + \left(\frac{\Delta P}{\Delta y} \Big|_i - \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{x_i, y_i} \right)^2 \right]}{\sum_i^{NV} \left[\left(\frac{\Delta P}{\Delta x} \Big|_i \right)^2 + \left(\frac{\Delta P}{\Delta y} \Big|_i \right)^2 \right]}}$$

onde NV é o número de volumes total da malha, P a pressão. Este procedimento já havia sido feito para as demais malhas. O resultado pode ser encontrado em Vasconcellos e Maliska (1999). O fato de que os resultados das Figs. 8 e 9 não permitem prever a qualidade dos que são mostrados nas Figs. 5 e 7 foi um dos grandes obstáculos ao desenvolvimento da presente investigação. Note-se que mesmo métodos insensíveis ao refino da malha nas Figs. 8 e 9 apresentaram bons resultados nas Figs. 5 e 7 e que, por outro lado, o melhor método na Fig. 8, o MMRQ, é o que fornece os piores resultados na Fig. 7, embora trate-se da mesma malha

nestas figuras. A recordação de três (velhos) conceitos, que podem ser encontrados em livros como o de Morton (1996) e são rerepresentados a seguir, vem esclarecer esta situação.

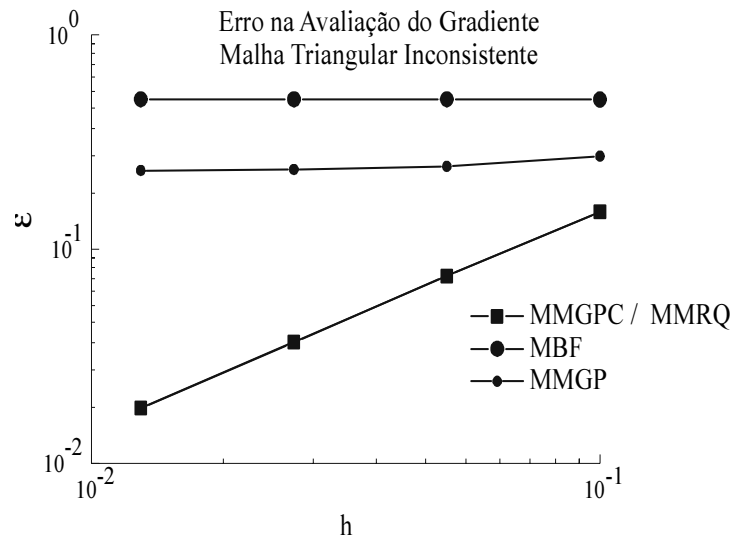


Figura 8 - Erro na avaliação do gradiente em uma malha triangular inconsistente

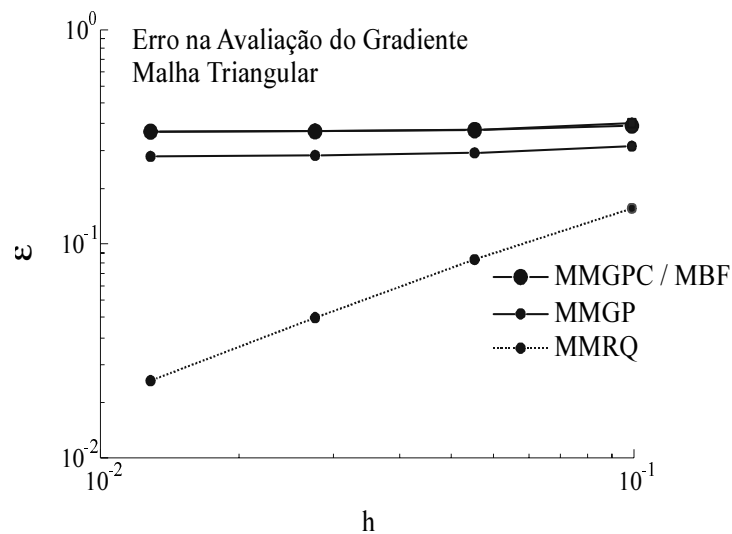


Figura 9 - Erro na avaliação do gradiente em uma malha triangular

Nos gráficos apresentados nas Figs. 8 e 9 h é definido pela seguinte equação

$$h = \sqrt{\frac{1}{NV}} \quad (3)$$

2.1. ERRO DE TRUNCAMENTO

Os gráficos das Figs. 8 e 9 mostram uma medida do que podemos chamar de erro de truncamento (local): a diferença entre o resultado da aplicação do operador diferencial à uma dada função e o resultado da aplicação do operador discreto (aproximado) à mesma função (convenientemente restrita aos volumes de controle da malha). A rigor esta função deveria ser uma solução exata do problema que se pretende resolver, mas o que normalmente se utiliza é um polinômio (obtido por expansão em série de Taylor) que aproxima localmente a solução. Nos trabalhos de Santos *et alii* (1999, 1996) essencialmente o que se analisa é o erro de truncamento das aproximações discutidas ali.

2.2. ERRO GLOBAL

Nas Figs. 5 e 7 são mostradas as diferenças entre uma solução exata (com erros muito pequenos) e diversas soluções numéricas. Estas diferenças são o que podemos chamar de erro global. Embora algumas vezes possa-se estimar com facilidade o erro global a partir do erro de truncamento, isto em geral não acontece. O que observa-se, em algumas situações consideradas neste artigo, é que mesmo quando o erro de truncamento local é insensível ao refino da malha o erro global pode ser decrescente à medida que a malha é refinada. É a esta possibilidade que se referem os casos de “cancelamento de erros” discutidos por Santos *et alii* (1999, 1996).

Malha Cartesiana Inconsistente

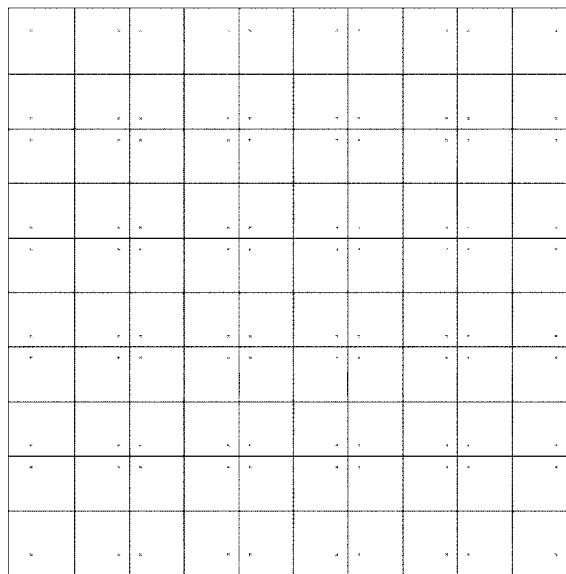


Figura 10 - Malha cartesiana inconsistente

2.3. RESTRIÇÃO DA SOLUÇÃO

Resultados como os mostrados nas Figs. 8 e 9 dependem de como é feita a avaliação do valor de p_i (pressão) associada a cada volume de controle a partir do campo $P(x, y)$ dado. Isto é o que se chama de restrição de uma função para uma certa malha. Na elaboração das Figs. 8 e 9 adotou-se $P_i = P(x_g, y_g)$ onde (x_g, y_g) são as coordenadas do ponto gerador do i -ésimo volume de controle. Esta escolha favorece o MMRQ, que parece o melhor método nestas figuras, mas não reflete o que se conhece no método de volumes finitos como utilizado no presente trabalho. De acordo com Santos *et alii* (1999) no método que

consideramos aqui P_i representa um valor médio de $P(x, y)$ ao longo do i -ésimo volume de controle. A partir desta consideração conjecturou-se que o problema que o MMRQ apresenta na Fig. 7 estaria associado a malhas em que os pontos geradores estão afastados dos centróides dos volumes de controle (sendo o centróide uma localização natural para o valor médio ao longo de um dado volume). É o que se discute a seguir.

Considerou-se então que a principal diferença entre a malha triangular da Fig. 1 e a da Fig. 6 encontra-se no fato de que na malha da Fig. 1 os pontos geradores do diagrama de Voronoi coincidem com os centróides dos volumes de controle, enquanto na malha inconsistente, da Fig. 6, isto não ocorre. Para analisar o efeito da localização dos pontos geradores do diagrama de Voronoi, construiu-se uma malha cartesiana com os pontos geradores longe dos centróides dos volumes. Esta malha é apresentada na Fig. 10 e é denominada aqui de malha cartesiana inconsistente. Ela continua sendo uma malha de Voronoi, condição necessária para a aplicação do método em discussão.

Simulou-se o mesmo problema usando a malha cartesiana inconsistente e os resultados podem ser vistos na Figura 11. A hipótese de que a posição do ponto gerador no volume pode influenciar a solução do problema foi confirmada. Na malha cartesiana inconsistente, o MMRQ forneceu resultados inconsistentes enquanto os demais métodos não. O refinamento da malha, novamente, não alterou este comportamento.

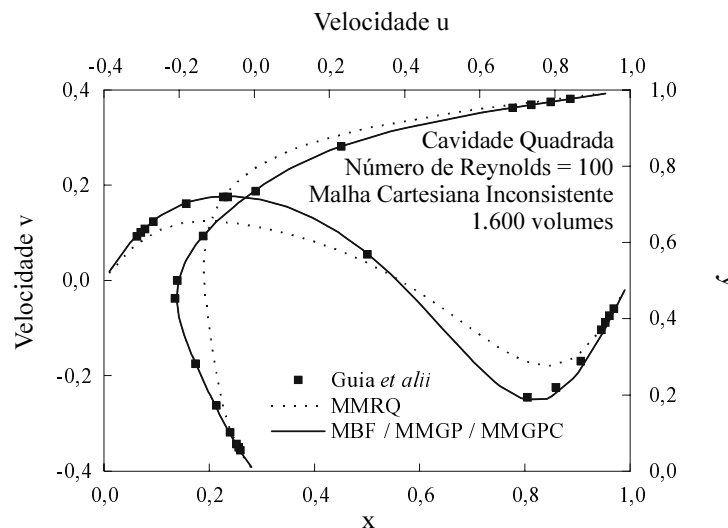


Figura 11 - Velocidades - Malha cartesiana inconsistente - Número de Reynolds = 100

3. CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho é o de ampliar o conhecimento sobre o método de volumes finitos em malhas não-estruturadas desenvolvido por Maliska (1995). Em Vasconcellos (1999) e em Maliska e Vasconcellos (1998) mostrou-se exemplos de situações físicas em que o uso deste método funcionou como idealizado por seu autor. Neste trabalho procurou-se mostrar que há certas situações em que soluções incorretas podem surgir, dependendo da malha utilizada, ou melhor, dependendo de onde está localizado o ponto gerador do volume. Identificou-se a origem do problema: estas soluções fora do padrão estão associadas à maneira como são calculados os gradientes de pressão. Levantou-se hipóteses que tentam justificar porque este efeito acontece em alguns volumes e em outros não. A hipótese que ainda se mantém é que volumes que possuam um ponto gerador longe do seu centróide são os que, possivelmente, apresentarão problemas, como o MMRQ. Uma análise teórica sobre este assunto pode ser observada em Santos *et alii* (1999)

4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Cardoso, Fabian Correa , 1997, *Algoritmo para a Simulação Numérica das Equações do Movimento pelo Método dos Volumes Finitos Usando Diagrama de Voronoi*, Dissertação de Mestrado, INE/UFSC.
- Davidson, Lars, 1996, "A Pressure Correction Method for Unstructured Meshes with Arbitrary Control Volumes", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 22, p. 265-281.
- Ethier, C. R. e Steinman, D. A., 1994, "Exact fully 3D Navier-Stokes solutions for benchmarking", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 19, p. 369-375.
- Guia, U., Guia, K. N. e Shin, C. T., 1982, "High Reynolds Solution for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equation and a Multigrid Method", *Journal of Computational Physics*, p. 387-411.
- Jameson, A. e Mavriplis, D. J., 1986, "Finite Volume Solution of the Two-Dimensional Euler Equations on a Regular Triangular Mesh", *AIAA Journal*, Vol. 24, p.611--618.
- Maliska, C. R., 1995, *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*, Livros Técnicos e Científicos Editora.
- Mathur, S. R. e Murthy, S. Y., 1997, "A Pressure-Based Method for Unstructured Meshes", *Numerical Heat Transfer - Part B*, Vol. 31, p. 195--215.
- Morton, K.W., 1996, *Numerical Solution of Convection-Diffusion Problems*, Chapman & Hall.
- Roth, M. J., 1997, *A control-volume-based finite-element method for solving the three-dimensional Navier-Stokes equations*, Master Thesis, University of Waterloo, Canadá.
- Santos, L. A., Vasconcellos, J. F. V. e Maliska, C. R., 1996, "Análise da Acurácia de Aproximações do Laplaciano em Volumes Finitos Usando Diagramas de Voronoi", *Anais do VI ENCIT*, p. 565-570.
- Santos, L. A., Vasconcellos, J. F. V., Maliska, C. R. e Silva, A. F. C., 1999, "Discussão de Aproximações para o Gradiente de Pressão no Método de Volumes Finitos em Diagramas de Voronoi", Publicado no COBEM 1999.
- Taniguchi, N., Arakawa, C. e Kobayashi, T., 1991, "Construction of a Flow-Simulating Method with Finite Volume Based on a Voronoi Diagram", *JSME International Journal*, Série II, Vol. 34, N° 1, p. 18-23.
- Vasconcellos, J. F. V. e Maliska, C. R., 1998, "Solução Numérica de escoamentos Incompressíveis Usando Malhas de Voronoi", *Anais do VII ENCIT*, p. 890-895.
- Vasconcellos, J. F. V. e Maliska, C. R., 1999, "Estudos para Otimizar o Método de Volumes Finitos em Malhas de Voronoi", Publicado no COBEM 1999.
- Vasconcellos, J. F. V., 1999, *Um Método de Volumes Finitos Usando Malhas Não-Estruturadas para o Estudo de Escoamentos com Frentes Livres*, Tese de Doutorado, EMC/UFSC, Brasil.